

TP 7 - Preuves par récurrence

1 Définir des fonctions récursives

Avant de commencer à faire des preuves par récurrence, nous allons avoir besoin de voir quelques points supplémentaires de syntaxe en LEAN.

1.1 Définition de fonctions par correspondance de motifs

En LEAN, il est possible – dans beaucoup de situations – de définir une fonction en faisant une disjonction de cas sur l'entrée.

Par exemple, on peut définir une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui renvoie 0 si l'entrée n vaut 0, et $n - 1$ dans les autres cas, de la façon suivante :

```
def moins_un : Nat → Nat
  | 0 => 0      -- si l'entree vaut 0, on renvoie 0
  | n + 1 => n  -- si l'entree est de la forme n + 1, avec n dans Nat, on renvoie n.
```

1. Tapez le code précédent, et affichez la valeur prise par la fonction sur divers entiers naturels (commande `#eval`).

Dans l'exemple précédent, on a une disjonction entre deux possibilités sur la valeur de l'entrée. On peut aussi écrire des fonctions plus compliquées faisant appel à plus de cas possibles.

2. Définir une fonction `exemple : Nat → Nat`, qui prend en entrée un entier naturel, et qui renvoie 1 si l'entier vaut 0, 0 si l'entier vaut 1, et $2n$ si l'entier est de la forme $n + 2$. Affichez les valeurs prises par cette fonction sur quelques exemples.

Il n'est pas possible de mettre n'importe quel type de formule comme possibilité pour l'entrée, mais LEAN fonctionne bien pour des formules comme `n+1`, `n+2`, etc. comme on l'a fait ci-dessus.

Attention, il ne faut pas oublier de traiter tous les cas possibles en entrée :

3. Que se passe-t-il si l'on essaie le code suivant ?

```
def exemple_fautif : Nat → Nat
  | 0 => 12
  | n + 3 => 3 * n
```

1.2 Fonctions récursives

En LEAN, il est autorisé pour une fonction de s'appeler elle-même : si c'est le cas, on dit que la fonction est récursive. En utilisant la syntaxe vue à la section précédente, cela permet de définir facilement beaucoup de fonctions intéressantes.

4. Que fait la fonction suivante ?

```
def factorielle : Nat → Nat
  | 0 => 1
  | n + 1 => (n+1) * (factorielle n)
```

Calculez quelques valeurs de cette fonction.

5. Définissez une fonction `somme_entiers` : $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ telle que `somme_entiers n` renvoie $\sum_{j=0}^n j$. De même, définissons une fonction `somme_carres` qui à $n \in \mathbb{N}$ associe la somme $\sum_{j=0}^n j^2$.

6. Définissez une fonction `est_pair` : $\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe `true` si n est pair, et `false` si n est impair.

(Indication : faites comme à la question 2 et traitez d'abord les cas de base où $n = 0$ ou $n = 1$)

Attention, LEAN n'acceptera pas de fonction récursive s'il y a un risque de déclencher une boucle infinie :

7. A votre avis, quel est le problème avec la fonction suivante ? Que se passe-t-il si on essaie de la taper en LEAN ?

```
def boucle_infinie : Nat → Nat
  | 0      => 0
  | n + 1 => boucle_infinie (n+1)
```

2 Preuves par récurrences

Reportez vous à l'aide-mémoire : une section a été ajoutée concernant les preuves par récurrence.

On va se servir de LEAN pour démontrer la formule donnant la somme des n premiers entiers. Pour cela, on va procéder en deux étapes :

8. En utilisant la fonction `somme_entiers` définie à la question 5., écrire l'énoncé d'un théorème `thm_somme_entiers_v2`, affirmant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2 \sum_{j=0}^n j = n(n+1).$$

Démontrer le théorème, et écrire en parallèle la preuve au papier. Dans l'étape d'hérédité, vous pourrez utiliser un bloc « `calc` » pour écrire le calcul pertinent (vous avez le droit d'utiliser les commandes `ring` ou `simp`).

(Indication : dans l'étape d'hérédité, commencez par réécrire la fonction `somme` avec la commande `rw` : cela fera apparaître sa définition par récurrence. Vous pouvez ensuite écrire le bloc `calc`. Si vous vous débrouillez bien, trois lignes suffisent !)

9. Ecrire maintenant un théorème `somme_entiers_final` affirmant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dans la preuve, après avoir introduit $n \in \mathbb{N}$, vous pouvez utiliser un bloc `calc`, et essayer de faire apparaître `2* somme n` à la première ligne. Vous pourrez ensuite utiliser le théorème de la question 8.

10. Procéder exactement de la même manière que précédemment pour démontrer la formule donnant la somme des n premiers carrés, puis des n premiers cubes.

11.* Utiliser ce qui précède pour écrire en LEAN une preuve du résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

On maintenant voir comment employer LEAN pour faire une récurrence double.

12. Définissez une fonction récursive `suite_double` : `Nat` \rightarrow `Int`, telle que pour tout entier n , `suite_double n` renvoie le n -ième terme de la suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_1 & = & 5 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

13. Définissez un prédicat P portant sur un entier $n \in \mathbb{N}$ de sorte que « $P \ n$ » soit la proposition suivante :

$$P(n) : \quad u_n = 3^n + 2^n.$$

14. Définissez un théorème `recurrence_double` affirmant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$P(n) \wedge P(n+1)$$

est vraie. Démontrer ensuite ce théorème, et écrire la preuve au papier en parallèle.

(Petit conseil : faites le calcul final sur papier avant de le faire sur machine. Encore une fois, vous pourrez utiliser un bloc `calc`. Si vous vous débrouillez bien, les tactiques `ring` et `simp` suffiront. Vous pouvez aussi utiliser la tactique `omega` à la place de `simp` : c'est aussi une commande de simplification, qui est assez efficace.)

15. Enfin, écrire et démontrer un théorème `formule_suite` affirmant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n + 2^n$.

16*. Imitez la méthode précédente pour montrer que la suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_1 & = & 1 \\ v_2 & = & 9 \\ v_{n+3} & = & v_{n+2} + 4v_{n+1} - 4v_n. \end{cases}$$

a pour terme général

$$v_n = 1 + 2^n + (-2)^n.$$